**Фильтрация состояний стохастических динамических систем с дискретным временем**

Мартингальное представление марковской цепи (см. уравнение (18) в соответствующей лекции) показывает, что марковская цепь может быть рассмотрена как *стохастическая динамическая система* с дискретным временем, которая, обычно на практике является частью стохастической системы наблюдения.

**Оптимальная фильтрация состояний нелинейных стохастических динамических систем с дискретным временем**

**Определение 1**. Пара рекуррентных соотношений

называется *стохастической динамической системой наблюдения с дискретным временем.* Здесь

* уравнение динамики,
* модель наблюдений,
* – ненаблюдаемое состояние системы; – последовательности детерминированных функций (дискретных сноса и диффузии в динамике); – последовательность случайных векторов – возмущений в динамике; – начальное условие;
* – процесс доступных наблюдений; – последовательности детерминированных функций (аддитивного полезного сигнала и интенсивности шумов); – последовательность ошибок наблюдений.

Для систем наблюдения (1), (2) рассматриваются задачи оценивания ненаблюдаемого состояния *X* по имеющейся совокупности наблюдений *Y*.

Пусть

– некоторая оценка (произвольная нелинейная функция наблюдений). Если *s < t*, то оценка называется *экстраполяционной* (или *прогнозной*), если *s = t,* то оценка называется оценкой фильтрации, если *s > t*, то оценка называется *интерполяционной* (или *оценкой сглаживания*).

В данном курсе мы будем рассматривать только задачи фильтрации состояний стохастических динамических систем.

Если оценка фильтрации имеет вид

то она называется *линейной* оценкой.

Показателем качества оценивания является СК-критерий

– средний квадрат ошибки оценки фильтрации.

**Определение 2**. Оценка называется (*абсолютно*) *оптимальной оценкой фильтрации,* если

где – множество функций наблюдений с конечным 2-м моментом.

Если

где - множество аффинных функций наблюдений, то оценка называется *оптимальной линейной оценкой фильтрации*.

Оценка далее в изложении называется *тривиальной*. Название объясняется, во-первых, тем, что безусловное математическое ожидание совпадает с условным относительно тривиальной сигма-алгебры, а, во-вторых, тривиальным использованием имеющихся наблюдений (попросту неиспользованием).

**Замечание 1.** Очевидно, что абсолютно оптимальная оценка обладает большей точностью, чем оптимальная линейная оценка. Однако, преимуществами линейной оценки может быть более простой алгоритм ее вычисления и пр.

Обозначим – неубывающее семейство -алгебр, порожденное процессом наблюдений, . Из свойств условного математического ожидания следует, что решение задачи абсолютно оптимальной фильтрации может быть задано с помощью условного математического ожидания оцениваемого состояния системы относительно имеющихся наблюдений, т.е. . Найдем рекуррентные соотношения, определяющие . Для этого следует сделать дополнительные предположения относительно системы наблюдения (1), (2). Они нужны для простоты вывода уравнений фильтрации.

1. Матрицы и являются невырожденными.
2. – последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов с плотностью распределения .
3. – последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов с плотностью распределения .
4. Начальное условие имеет плотность распределения .
5. , и независимы в совокупности.

Вывод рекуррентных соотношений фильтрации основан на свойстве условной плотности распределения:

Вывод уравнений осуществляется методом математической индукции. Будем обозначать – условная плотность распределения состояния относительно (*плотность оценки фильтрации*).

1. *t = 0*. В этом случае

,

и

– формулы для вычисления начального условия.

1. Пусть для момента времени известны плотность оценки фильтрации состояния относительно и соответствующая оценка фильтрации . Тогда плотность состояния относительно (*плотность распределения одношагового прогноза*) определяется формулой
2. Условная совместная плотность распределения пары относительно принимает вид

Тогда плотность оценки фильтрации на шаге *t* равна

а искомая оценка оптимальной фильтрации –

Таким образом, абсолютно оптимальная оценка фильтрации имеет двухшаговую структуру типа «прогноз-коррекция» и задается формулами (6), (6’) – начальное условие, (7) – прогноз и (8), (9), (9’) – коррекция.

**Замечание 2**. Следует отметить, что в действительности рекуррентными соотношениями связаны не оценка фильтрации состояния системы , а плотность оценки фильтрации . Если в качестве интересующего нас «полезного сигнала», подлежащего оценке, выступает не состояние, а некоторая функция от нее , обладающая конечным 2-м моментом, то она может быть вычислена по формуле

**Замечание 3**. Несмотря на кажущуюся простоту, оценки оптимальной фильтрации весьма сложно реализуются на практике. Это связано с необходимостью многократного вычисления многомерных интегралов в формулах (7) и (9) (для разных *t* и всех *x*), и (9’).

**Замечание 4**. Обычно, при решении задачи оптимизации (и оптимальная фильтрация – не исключение) помимо точки минимума интерес представляет также и значение критерия оптимальности в точке минимума. В нашем случае критерий оптимальности может быть вычислен с помощью ковариации ошибки оценки фильтрации . Если считать, что – совместная плотность распределения наблюдений , то

Очевидно, что практические вычисления по этим формулам в общем случае невозможны. Обычно оценивают с помощью метода Монте-Карло.

Тем не менее, условную ковариацию ошибки оценки можно вычислить следующим образом

**Замечание 5**. Оптимальная оценка фильтрации обладает следующим свойством:

для произвольной функции такой, что Теоретически оптимальную оценку можно искать, исходя из условия (10).

**Фильтр Калмана**

В некоторых частных случаях решение задачи оптимальной фильтрации имеет компактный вид, а алгоритм вычисления оптимальной оценки достаточно прост для реализации. В частном случае, когда совместное распределение оцениваемого состояния и доступных наблюдений является гауссовским, искомое условное математическое ожидание является аффинной оценкой наблюдений, и ее вычисление базируется на теореме о нормальной корреляции. Она же является основой для вывода фильтра Калмана.

Фильтр Калмана – рекуррентный алгоритм, позволяющий вычислить оценку оптимальной фильтрации и ковариационную матрицу ее ошибки в линейной гауссовской системе наблюдения.

Рассмотрим частный случай системы наблюдения (1), (2) – линейный гауссовский

.

Относительно системы наблюдения сделаны следующие предположения.

1. Процессы предполагаются стандартными гауссовскими дискретными белыми шумами.
2. , и независимы в совокупности.
3. Шумы в наблюдениях не вырождены, т.е.

**Теорема 1**. (Абсолютно) оптимальная оценка состояния линейной гауссовской системы наблюдения и матрица ковариации ее ошибки определяются рекуррентным алгоритмом фильтрации Калмана:

1. Начальное условие
2. Шаг прогноза:
3. Шаг коррекции:

Здесь – оптимальный прогноз на один шаг, а – ковариационная матрица ее ошибки.

**Следствие 1**. Если (11), (12) – линейная *негауссовская* система наблюдения с теми же моментными характеристиками, то оценка фильтрации Калмана (13) – (18) определяет наилучшую *линейную* оценку фильтрации.

Двухшаговый алгоритм. Ковариационная матрица вычисляется. Условие оптимальности.

**Замечание 6**. Алгоритм фильтрации является двухшаговым типа «прогноз-коррекция». Сначала строится оптимальный одногашовый прогноз, который затем корректируется по невязке с коэффициентом усиления .

**Замечание 7**. Преимуществом алгоритма фильтрации Калмана является возможность одновременного вычисления оценки фильтрации и показателя ее качества – ковариационной матрицы ее ошибки . Эта возможность обеспечивается свойством гауссовского распределения и теоремой о нормальной корреляции: в гауссовском случае условная ковариация совпадает с безусловной.

**Замечание 8**. В отличие от условия (10) абсолютно оптимальной оценки необходимым и достаточным условием оптимальности линейной оценки является выполнение условий несмещенности

и ортогональности ошибки оценки фильтрации доступным наблюдениям:

**Задача 1 (для самостоятельного решения)**. Для оценки фильтрации Калмана проверить выполнение условий (19) и (20).

**Оптимальная фильтрация состояний марковских цепей**

Случай линейных гауссовских систем является не единственным, в котором уравнения абсолютно оптимальной фильтрации имеют простой вид и легко реализуются на компьютере. Задача фильтрации состояний марковских цепей по косвенным зашумленным наблюдениям также относится к этому классу.

Предварительно рассмотрим две вспомогательные задачи.

**Задача 2**. Пусть *X* – дискретный случайный вектор с распределением

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | *e1* | *e2* | … | *eN* |
| *p* | *p1* | *p2* | … | *pN* |

Пусть – произвольная функция *X*. Доказать, что функция может быть задана как линейная, т.е. существует матрица *F,* такая, что *Y = f(X) = FX* почти наверное.

**Доказательство:**

Рассмотрим столбцы *Fk = f (ek), k=1,…,N*, и построим блочную матрицу, состоящую из столбцов *Fk* :

Легко проверить, что с данной матрицей *Y = f(X) = FX* почти наверное.

**Задача 3**. Пусть *X* – дискретный случайный вектор с распределением

*p = col (p1,…,pN)*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | *e1* | *e2* | … | *eN* |
| *p* | *p1* | *p2* | … | *pN* |

*W* – *M*-мерный случайный вектор с плотностью распределения , независимый от *X*, *M[W] = 0*, *cov (W,W) = I*. Пусть Доступно следующее наблюдение

Найти

**Решение:**

Сначала выведем формулу с помощью инженерного подхода, а потом проверим ее с помощью определения условного математического ожидания. «Обобщенная» плотность распределения вектора *X* имеет вид: Легко проверить, что условная плотность распределения наблюдения *Y* относительно *X* описывается формулой:

Тогда «обобщенная» совместная плотность распределения *(X,Y)* имеет вид

а частная плотность компонента *Y*

В этом случае искомое условное математическое ожидание вычисляется по формуле

Таким образом,

Проверим истинность формул (22) и (22’) с помощью определения условного математического ожидания. Выберем произвольное множество :

что и требовалось доказать.

**Замечание 9**. В формуле (21) первое слагаемое можно трактовать как функцию полезного сигнала, а второе – как шум в наблюдениях. Но шум в данном случае является мультипликативным, и его интенсивность также содержит информацию о полезном сигнале. Оценки (22), (22’) позволяют эту информацию извлечь.

**Замечание 10**. Теорема о нормальной корреляции, примененная в негауссовском случае, позволяет построить оптимальную линейную оценку *X* по *Y*. В Задаче 3 первые два момента составного вектора *col(X,Y)* определяются следующими формулами (истинность проверить самостоятельно)

Тогда по теореме о нормальной корреляции наилучшая линейная оценка определяется формулой

а ковариационная матрица ее ошибки – формулой

Из последних двух формул можно заключить, что отсутствие аддитивного полезного сигнала в (21) (случай *A=0*) приводит к тому, что оптимальная линейная оценка совпадает с тривиальной (**проверить самостоятельно!**), то есть линейное оценивание не улучшает качество по сравнению с тривиальным оцениванием. В то же время, нелинейная оценка не совпадает с тривиальной и обладает более высокой точностью в смысле СК-критерия (4). Можно подобрать такие численные параметры, что линейная оценка будет совпадать с тривиальной, в то время как нелинейная будет произвольно близка к точному значению оцениваемого вектора.

**Задача 4 (для самостоятельного решения)**. Пусть – абсолютно оптимальная оценка случайного вектора (22), а – его оптимальная линейная оценка (23). Выполнены ли для компонентов этих оценок условия нормировки ? Выполнены ли для компонентов этих оценок условия неотрицательности ?

Вернемся к задаче фильтрации состояний марковской цепи. Рассмотрим следующую систему наблюдения с дискретным временем:

Здесь

* – марковская цепь с конечным множеством состояний , заданная своим мартингальным разложением (см. предыдущую лекцию); –множество матриц переходных вероятности цепи на одном шаге, – начальное распределение цепи;
* – процесс доступных наблюдений: – последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов с плотностью распределения , независимая от состояния *X*, *M[W] = 0*, *cov (W,W) = I*; симметрических положительно определенных матриц.

**Замечание 11**. Согласно решению Задачи 2, к линейному виду (26) можно привести любые наблюдения вида «полезный сигнал плюс некоторый аддитивный шум».

**Замечание 12**. Обозначим – неубывающее семейство -подалгебр. Очевидно, что , и также , где – неубывающее семейство -подалгебр, порожденных процессом *X*. Так как процессы *X* и *W* независимы, то легко проверить, что цепь *Х* является марковской не только относительно собственного потока

Вновь задача абсолютно оптимальной фильтрации заключается в нахождении . Выведем его методом математической индукции.

1. Пусть *t = 0*. В этом случае

Таким образом, если случайный вектор имеет в качестве множества допустимых значений множество единичных векторов , то вектор его распределения (условного или безусловного) будет совпадать с его математическим ожиданием. Этим замечательным свойством мы будем пользоваться и в дальнейшем при выводе этого фильтра.

1. Пусть известна оценка фильтрации на шаге *t-1*: . Заметим, что это условное математическое ожидание совпадает с условным распределением марковской цепи. Сначала построим оптимальный одношаговый прогноз:

Таким образом, относительно наблюдений до момента времени *t-1* включительно состояние *X(t)* представляет собой случайный вектор со значениями из и распределением . Тогда совместная «обобщенная» плотность пары *(X(t),Y(t))* относительно может быть получена с помощью решения Задачи 3:

и данная формула является аналогом (8) при выводе уравнений оптимальной нелинейной фильтрации в общем случае. Тогда искомая оценка фильтрации на шаге t определяется следующим образом (сравните с (9), (9’) и (22)):

или покомпонентно

Таким образом, алгоритм оптимальной фильтрации состояний марковской цепи по косвенных зашумленным наблюдениям описывается следующими формулами: (27) – начальное условие, (28) – прогноз, (29) (или (29’) покомпонентно) – коррекция.

**Задача 5 (для самостоятельного решения)**. Доказать, что шум наблюдений в (26)

является процессом дискретного белого шума (в широком смысле) с параметрами

Условия неотрицательности и нормировки компонент

Точность разных фильтров

**Замечание 13**. В силу того, что система наблюдения (25), (26) – линейная негауссовская, а также решения Задачи 5, фильтр Калмана, примененный к (25), (26) дает оптимальную линейную оценку состояния марковской цепи по имеющимся наблюдениям, а также ковариационную матрицу ошибки оценки фильтрации.

**Замечание 14.** В силу того, что абсолютно оптимальная оценка состояния марковской цепи совпадает с ее условным распределением относительно имеющихся наблюдений, то условная ковариационная матрица ошибки оценки фильтрации вычисляется просто

.

В этой задаче безусловную ковариационную матрицу ошибки оценки фильтрации аналитически вычислить не удается, приходится довольствоваться только ее оценками, полученными методами Монте-Карло.

**Замечание 15**. Из решения Задачи 4 можно сделать вывод, как абсолютно оптимальная, так и линейная оптимальная оценка удовлетворяют условиям нормировки, в то время как условие неотрицательности выполняется для абсолютно оптимальной оценки и не выполняется для оптимальной линейной оценки.